Математика

подготовка к экзамену. (Теория)

Экзаменационный билет. Оценка

Билет состоит из 8 заданий

1-3 задания: теоретические вопросы

4-8 задания: практические задачи

Оценка за экзамен:

«3» – 5 заданий

«4» – 6 заданий

«5» – 7 заданий

Вопросы к экзамену по математике:

Стереометрия:

1. Вектор. Основные понятия и определения. Расстояние между двумя точками
2. Прямоугольная система координат в пространстве. Сложение, вычитание, умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов. Косинус угла между векторами (через координаты).
3. Многогранники. Призма и ее элементы. Основные формулы
4. Многогранники. Пирамида и ее элементы. Основные формулы
5. Тела вращения. Цилиндр и его элементы. Основные формулы
6. Тела вращения. Конус и его элементы. Основные формулы
7. Тела вращения. Сфера. Шар. Основные формулы

Корни, степени и логарифмы:

1. Показательная функция, ее свойства и график.
2. Степень с рациональным показателем, свойства степени
3. Решение иррациональных уравнений
4. Решение показательных уравнений и неравенств
5. Понятие логарифма числа. Основные свойства логарифмов.
6. Логарифмическая функция. Ее свойства и график.
7. Решение логарифмических уравнений.
8. Решение логарифмических неравенств.

Тригонометрия

1. Радианное измерение углов. Синус, косинус, тангенс, котангенс угла
2. Формулы приведения
3. Основные тригонометрические тождества, решение задач.
4. Обратные тригонометрические функции.
5. Решение уравнений: $\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$

Комплексные числа

1. Множества чисел. Комплексные числа, заданные в алгебраической форме.
2. Комплексные числа в геометрической форме. Арифметические действия над комплексными числами.

Математический анализ

1. Приращение функции. Понятие о производной.
2. Производные суммы, разности, произведения, частного. Производная сложной функции.
3. Уравнение касательной
4. Применение производной к исследованию функции.
5. Максимум и минимум функции, четность и нечетность функции
6. Первообразная и ее свойства. Таблица первообразных.

Функции, их свойства и графики:

1. Понятие функции. Основные свойства функции. Алгоритм исследования
2. Линейные функции. График линейной функции
3. Квадратичная функция и ее график
4. Тригонометрические функции, их свойства и графики
5. Степенная функция, ее свойства и график.

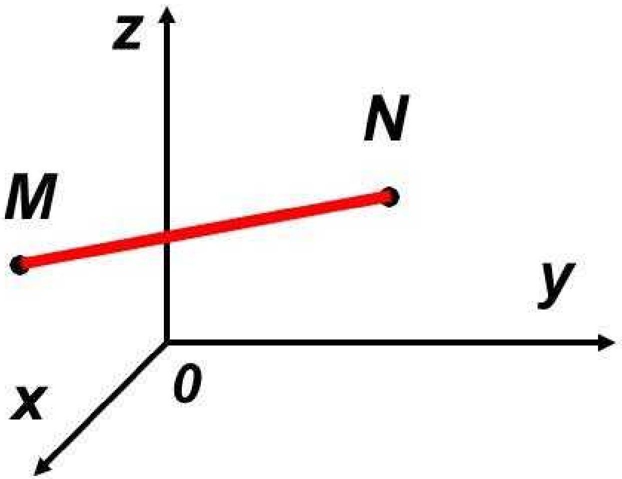
Алгебра 7-9 классы

1. Решение линейных уравнений (алгоритм).
2. Решение квадратных уравнений (алгоритм)
3. Метод Крамера для решения систем линейных уравнений.

Ответы на вопросы:

1. Вектор. Основные понятия и определения. Расстояние между двумя точками

Вектор в геометрии — это отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек считается началом, а какая — концом. Вектор обозначается одной строчной буквой латинского алфавита или двумя заглавными со стрелкой (в некоторых случаях — прямой линией) сверху.



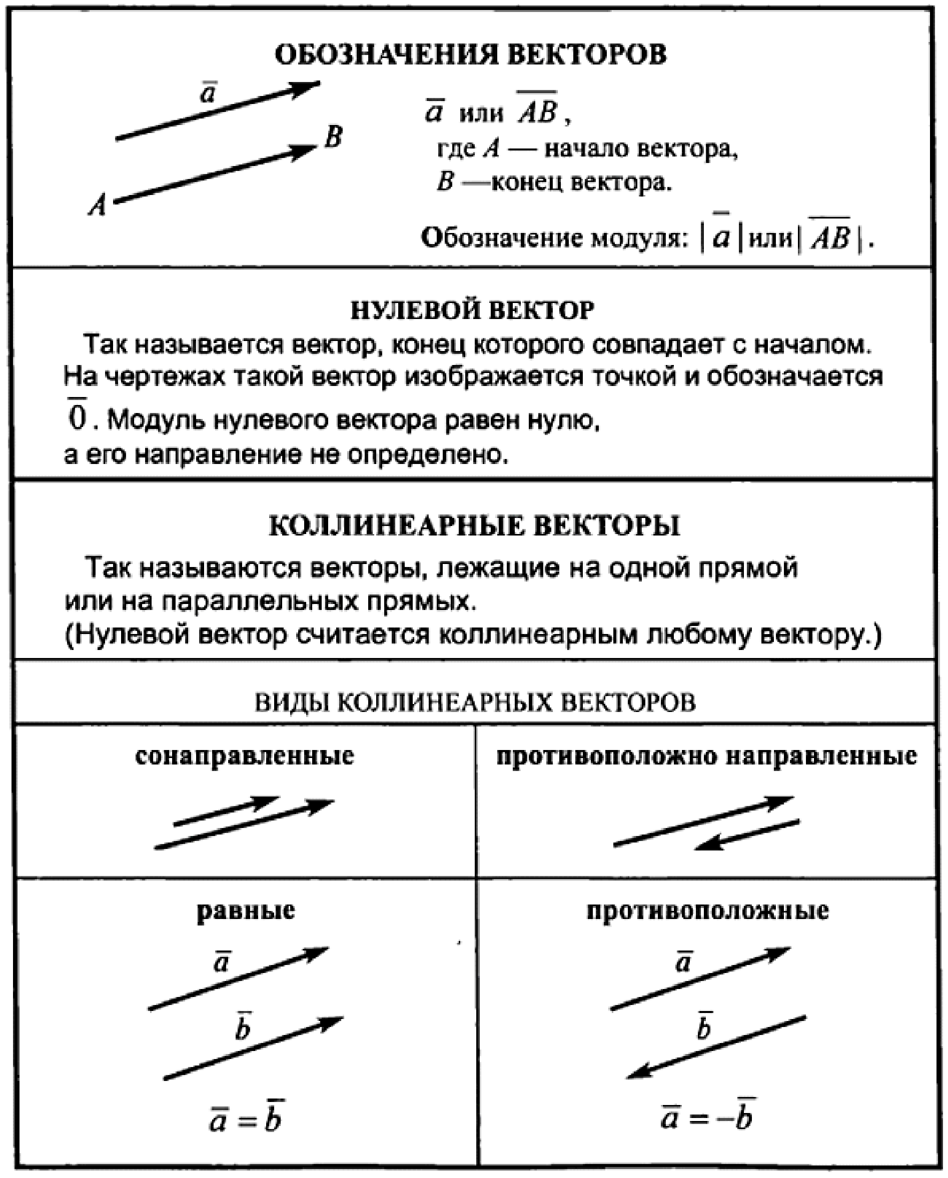
Если

$$M\left(x_1, y_1, z_1\right)$$

$$N\left(x_2, y_2, z_2\right)$$

то

$$MN = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2 + \left(z_2 - z_1\right)^2}$$



ОБОЗНАЧЕНИЯ ВЕКТОРОВ

$\overline{a}$ или $\overline{AB}$, где A — начало вектора, B — конец вектора.

Обозначение модуля: $|\overline{a}|$ или $|\overline{AB}|$.

НУЛЕВОЙ ВЕКТОР

Так называется вектор, конец которого совпадает с началом. На чертежах такой вектор изображается точкой и обозначается $\overline{0}$. Модуль нулевого вектора равен нулю, а его направление не определено.

КОЛЛИНЕАРНЫЕ ВЕКТОРЫ

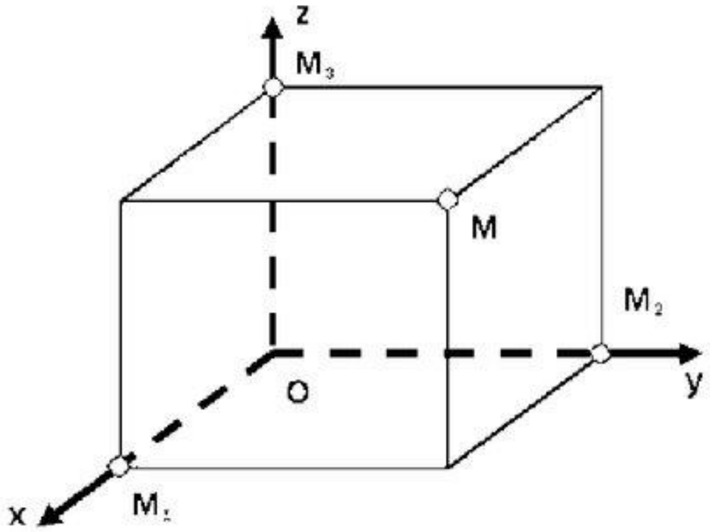
Так называются векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. (Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.)

ВИДЫ КОЛЛИНЕАРНЫХ ВЕКТОРОВ

сонаправленные	**противоположно направленные**
равные $\overline{a} = \overline{b}$	**противоположные** $\overline{a} = -\overline{b}$

Прямоугольная система координат в пространстве. Сложение, вычитание, умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов. Косинус угла между векторами (через координаты).

Если через точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждом из них выбрано направление и выбрана единица измерения отрезков, то говорят, что задана **прямоугольная система координат** в пространстве.



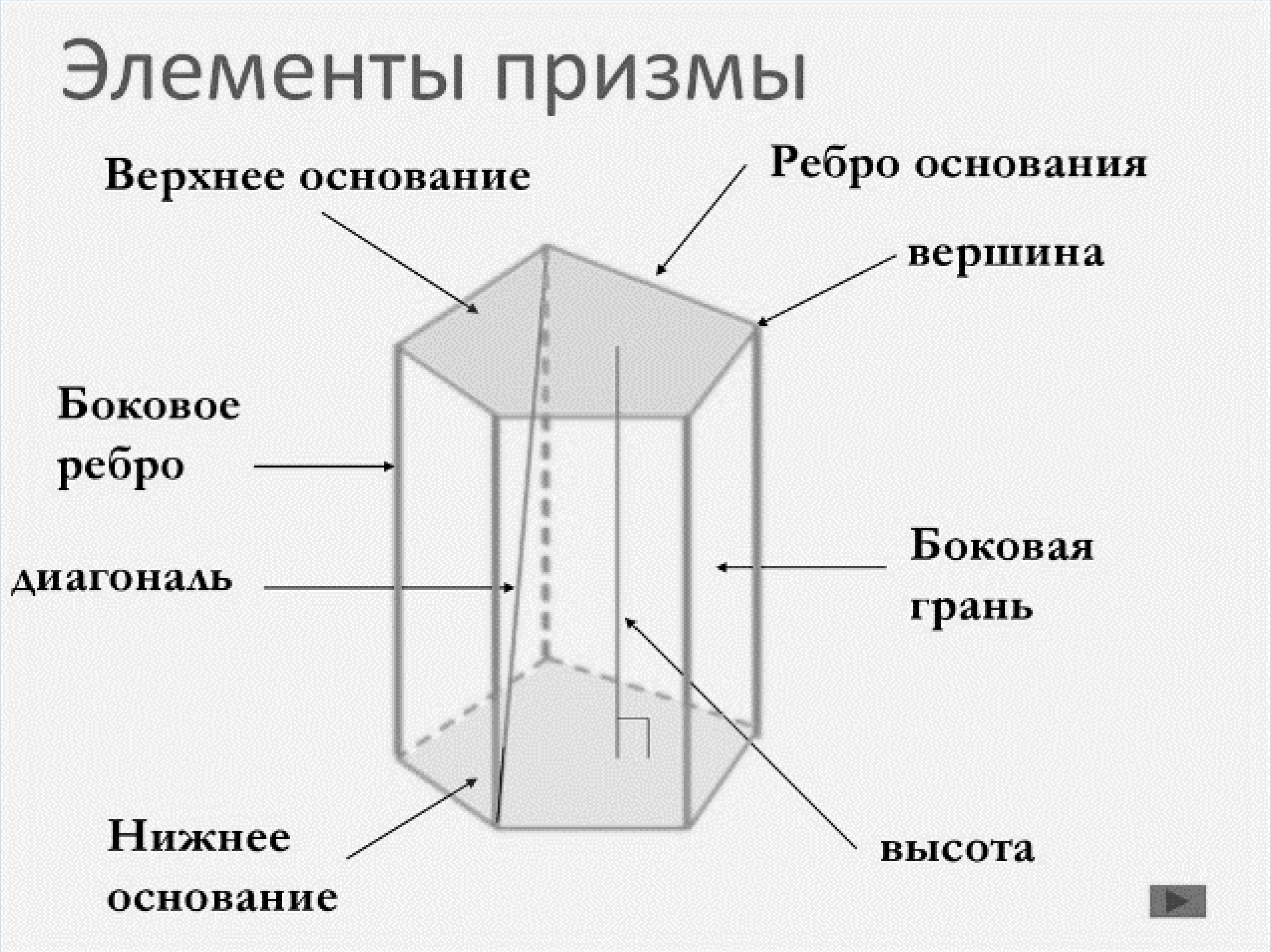
В прямоугольной системе координат каждой точке М пространства сопоставляется тройка чисел, которые называются её координатами.

№	*Вид операции*	*на плоскости*	*в пространстве*
1	Координаты вектора	$A\ (x_1;\ y_1);\ B\ (x_2; y_2)$ $\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$	$A\ (x_1;\ y_1;\ z_1);\ B\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$ $\overline{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1; z_2 - z_1)$
2	Длина вектора	$\overline{a} = (x; y)$ $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\overline{a} = (x; y; z)$ $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
3	Сложение и вычитание векторов	$\overline{a} = (x_1; y_1)\ \overline{b} = (x_2; y_2)$; $\overline{a} \pm \overline{b} = (x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2)$	$\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)\ \overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$; $\overline{a} \pm \overline{b} = (x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$
4	Умножение вектора на число	$\overline{a} = (x; y)$; $k \in R$ $k\overline{a} = (kx; ky)$	$\overline{a} = (x; y; z)$; $k \in R$ $k\overline{a} = (kx; ky; kz)$
5	Скалярное произведение векторов	$\overline{a} = (x_1; y_1)\ \overline{b} = (x_2; y_2)$; $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$	$\overline{a} = (x_1; y_1; z_1)\ \overline{b} = (x_2; y_2; z_2)$; $\overline{a} \cdot \overline{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$
6	Угол между векторами	$\cos(a; b) = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\lvert\overline{a}\rvert \cdot \lvert\overline{b}\rvert}$	$\cos(a; b) = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\lvert\overline{a}\rvert \cdot \lvert\overline{b}\rvert}$

Многогранники. Призма и ее элементы. Основные формулы

Многогранник — **это геометрическое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников**.
Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его **гранями**.
Стороны граней — **рёбрами**, а концы рёбер — **вершинами** многогранника.
Многогранник может быть **выпуклым**, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой грани.

Призма — это многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, находящимися в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами.
Элементы призмы:
Основания. Две параллельные и равные грани призмы, которые определяют её форму.
Боковые грани. Грани, соединяющие соответствующие точки оснований. Число боковых граней определяет форму призмы и может варьироваться в зависимости от типа призмы.
Высота призмы. Расстояние между двумя параллельными основаниями. Она перпендикулярна плоскости основания и равна расстоянию между этими основаниями.



Площадь правильного многоугольника

$$S = \frac{1}{2}\mathbf{Pr}$$

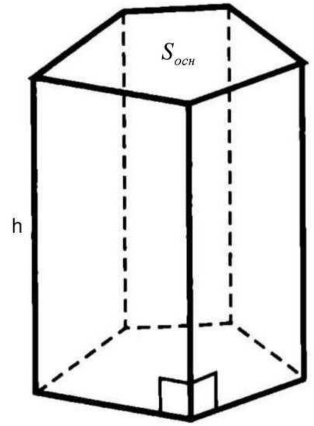
Сторона правильного многоугольника

$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}$$

Радиус вписанной окружности

$$r = R\cos\frac{180^0}{n}$$

Произвольная прямая призма



Боковая поверхность

$$S_{бок} = P_{осн} \cdot h$$

Полная поверхность

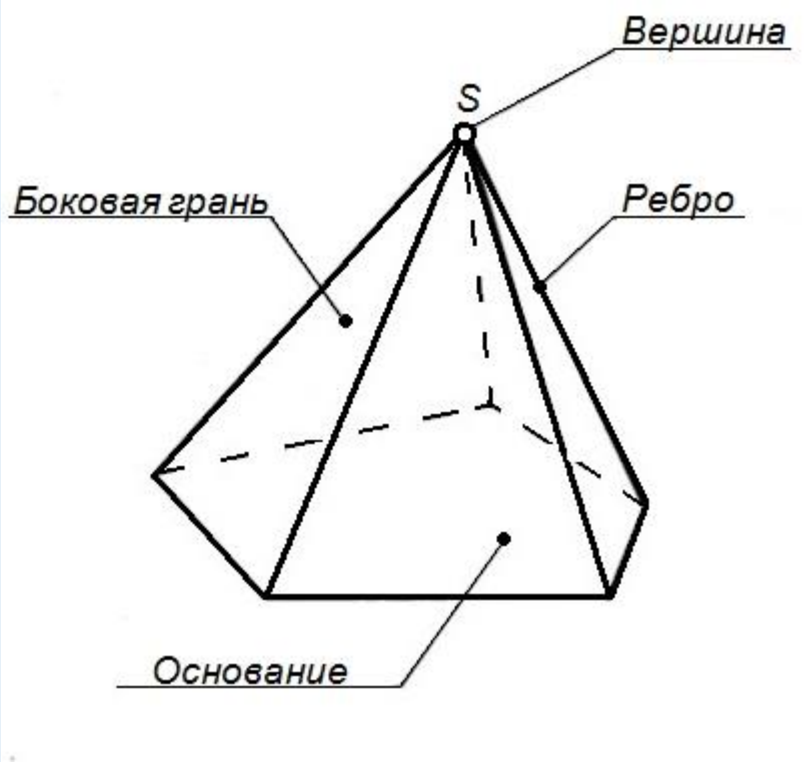
$$S_{пол} = S_{бок} + 2S_{осн}$$

Объем

$$V = S_{осн} \cdot h$$

Многогранники. Пирамида и ее элементы. Основные формулы

Пирамида – многогранник, составленный из n -угольника и n треугольников. Основание пирамиды – грань пирамиды, являющаяся n -угольником. Вершина пирамиды – общая точка всех треугольников, лежащих в боковых гранях. Боковая грань – грань пирамиды, являющаяся треугольником. Боковые ребра – общие отрезки боковых граней



Площадь правильного многоугольника

$$S = \frac{1}{2}\mathbf{Pr}$$

Сторона правильного многоугольника

$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n}$$

Радиус вписанной окружности

$$r = R\cos\frac{180^0}{n}$$

- Площадь боковой поверхности пирамиды:

$$S_{бок} = \frac{1}{2}P \cdot h$$

где P – периметр основания, h – апофема.

- Площадь полной поверхности пирамиды:

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$$

- Объём пирамиды:

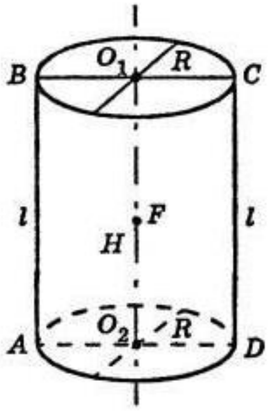
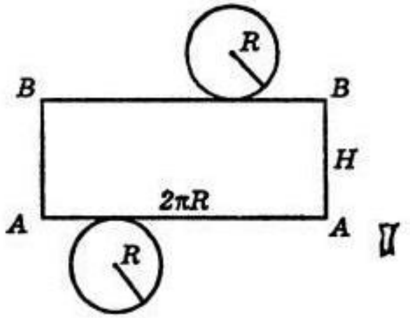
$$V = \frac{1}{3}S_{осн}H$$

где $S_{осн}$ – площадь основания, H – высота пирамиды.

$$h = \sqrt{r^2 + H^2}$$

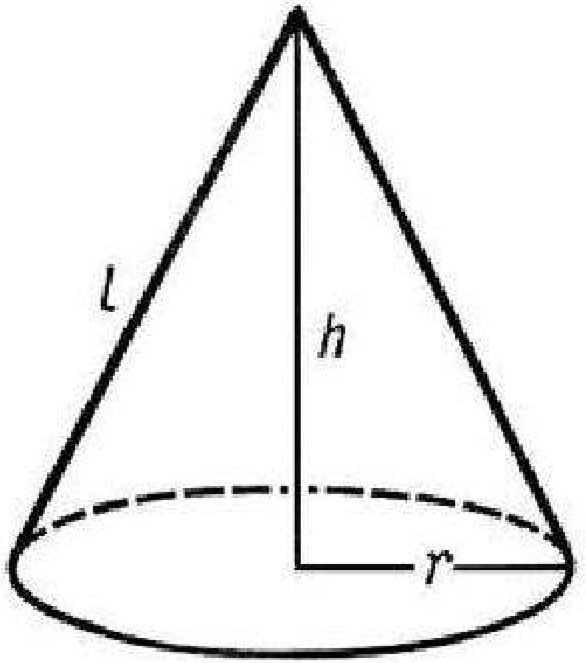
Тела вращения. Цилиндр и его элементы. Основные формулы

Тело вращения — **это объёмная фигура, возникающая при вращении плоской геометрической фигуры вокруг оси, лежащей в той же плоскости**.

Цилиндром **(прямым, круговым) называется тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг прямой, содержащей его сторону. Круги с центрами O_1 и O_2 — *основания цилиндра*, отрезок AB — *образующая* ($AB = l$), отрезок $O_2A = O_1B$ — *радиус основания*, отрезок O_1O_2 (расстояние между плоскостями оснований) — *высота цилиндра* ($H = l$), прямоугольник $ABCD$ — *осевое сечение*, отрезок AC — *диагональ осевого сечения*, прямая O_1O_2 — *ось вращения*, точка F (середина отрезка O_1O_2) — *центр симметрии*.**	
Развертка цилиндра **— прямоугольник и два круга.**	
Площадь боковой поверхности цилиндра $S_{бок} = 2\pi RH = 2\pi Rl$ **Площадь полной поверхности цилиндра (площадь его развертки)** $S_{полн} = 2\pi R^2 + S_{бок} = 2\pi(R + H)R$	**Объем цилиндра** $V = S_о \cdot H = \pi R^2 H$

Тела вращения. Конус и его элементы. Основные формулы

КОНУС –



это тело, которое состоит из круга – основания конуса, точки, не лежащей в плоскости этого круга, – вершины конуса, и всех отрезков, соединяющих вершину с точками основания

Элементы конуса:

H – высота конуса

r – радиус основания

L – образующая конуса

$$L = \sqrt{R^2 + H^2}$$

$$S_{\text{ос.сеч.}} = RH$$

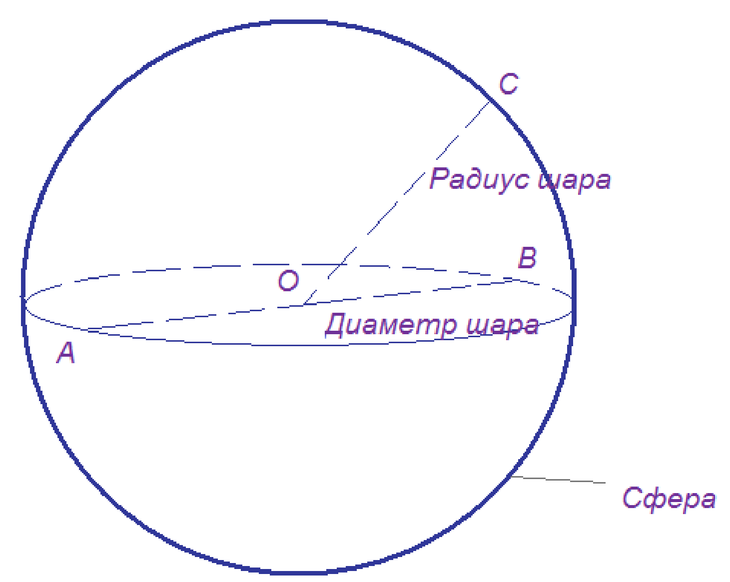
$$S_{\text{бок.}} = \pi RL$$

$$S_{\text{полн.}} = \pi R(R + L)$$

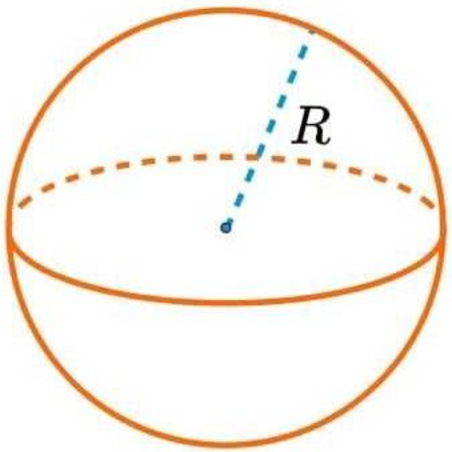
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

Тела вращения. Сфера. Шар. Основные формулы

Шар — это геометрическое тело, совокупность всех точек пространства, находящихся от центра на расстоянии, не больше заданного. Это расстояние называется радиусом шара. Шар образуется вращением полукруга (или круга) вокруг его неподвижного диаметра. Этот диаметр называется осью шара, а оба конца указанного диаметра — полюсами шара. Поверхность шара называется сферой: замкнутый шар включает эту сферу, открытый шар — исключает.

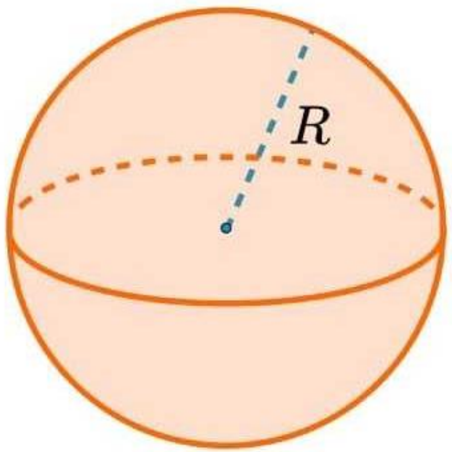


Площадь поверхности сферы



$$S = 4\pi R^2$$

Объем шара

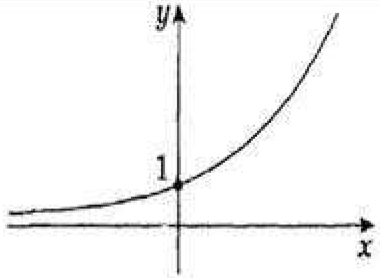
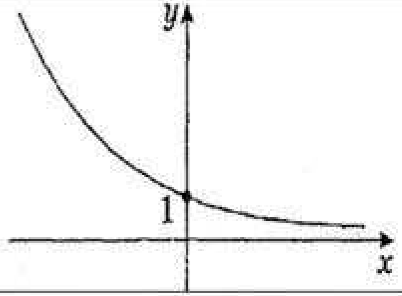


$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Показательная функция, ее свойства и график.

Показательная функция — **это математическая функция вида** $y = a^x$**, где a — заданное число, x — переменная**.

Свойства показательной функции

Свойства функции $y = a^x$		$a > 1$	$0 < a < 1$
$D(y)$		$(-\infty;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$
$E(y)$		$(0;\ +\infty)$	$(0;\ +\infty)$
Точки пересечения с осями	с OY:	$(0;\ 1)$	$(0;\ 1)$
	с OX:	–	–
$y \geq 0$		$(-\infty;\ +\infty)$	$(-\infty;\ +\infty)$
y ↗		$(-\infty;\ +\infty)$	–
y ↘		–	$(-\infty;\ +\infty)$
Четность/Нечетность		Общего вида	Общего вида
График			

Степень с рациональным показателем, свойства степени

Степень с рациональным показателем -
это та, в показателе которой находится конечная обыкновенная или десятичная дробь. Любую степень с рациональным показателем можно представить в виде корня, чья степень будет равна знаменателю дроби, находящейся в показателе степени, а числитель будет степенью подкоренного выражения.

$a^{\frac{p}{q}}$ p – целое число, q – натуральное число, $q \geq 2$

Примеры: 2^{-1}, $3^{1/2}$, $a^{3/4}$

Помните!

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

Решение иррациональных уравнений

Иррациональное уравнение — это уравнение, содержащее переменную под знаком корня или под знаком возведения в дробную степень.

$$\sqrt[n]{f(x)} = a$$

где a – некоторое число (константа), f(x) – рациональное выражение.

Для его решения необходимо обе части возвести в степень **n**, тогда корень исчезнет:

$$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n = a^n$$

$$f(x) = a^n$$

Получаем рациональное ур-ние, решать которые мы уже умеем. Однако есть важное ограничение. Мы помним, что корень четной степени всегда равен положительному числу, и его нельзя извлекать из отрицательного числа. Поэтому, если в ур-нии

$$\sqrt[n]{f(x)} = a$$

n – четное число, то необходимо, чтобы **a** было положительным. Если же оно отрицательное, то ур-ние не имеет корней. Но на нечетные **n** такое ограничение не распространяется.

Способы решения иррациональных уравнений

К иррациональным уравнениям относятся уравнения вида $\sqrt{A(x)} = B(x)$, $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$, $A\sqrt{B(x)} = 0$ где A(x) и B(x) – выражения с переменной.

Главной идеей решения иррационального уравнения состоит в сведении этого уравнения к рациональному уравнению, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению.

Основной способ для избавления от корня и получить рациональный вид уравнения – это возведение обеих частей этого уравнения в одну и ту же степень, которая имеет корень, содержащий неизвестное, и последующее «освобождение» от радикалов по формуле:

$$\left(\sqrt[n]{\varphi(x)}\right)^n = \varphi(x).$$

Решение показательных уравнений и неравенств

Введение алгоритма

теорема: Показательное уравнение $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

где $a > 0, a \neq 1$, равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Решение:

$$2^{2x-4} = 64;$$
$$2^{2x-4} = 2^6;$$
$$2x - 4 = 6;$$
$$2x = 10;$$
$$x = 5.$$

Ответ: 5.

Алгоритм:

1. С помощью равносильных преобразований привести уравнение к виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a > 0, a \neq 1$.
2. Заменить уравнение равносильным ему уравнением $f(x) = g(x)$ и решить его.
3. Корни уравнения являются корнями исходного показательного уравнения. Записать ответ.

Неравенство вида $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, где $a>0$ и $a\neq1$, называется показательным

Решение основано на следующем свойстве показательной функции:

- функция $y=a^x$ возрастает, если $a>1$

- функция $y=a^x$ убывает, если $0<a<1$

Таким образом:

$$a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$f(x)<g(x)$ при $a>1$	$f(x)>g(x)$ при $0<a<1$

Понятие логарифма числа. Основные свойства логарифмов

Основные понятия

- Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени , в которую нужно возвести основание a ,чтобы получить число b.

$$\log_a b$$

- Свойства логарифма(x>0,y>0)

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^p = p \log_a x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

ОСНОВНОЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

$$a^{\log_a b} = b$$

Логарифмическая функция. Ее свойства и график

$y = \log_a x$ при $a > 1$;

1.D(f) = (0; + ∞);

2.не является ни четной, ни нечетной;

3.возрастает на (0; + ∞);

4.не ограничена сверху, не ограничена снизу;

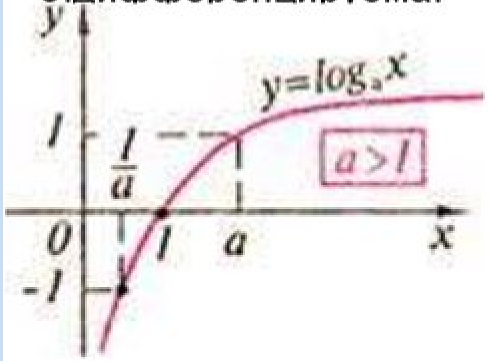
5.не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

6.непрерывна;

7.E(f) = (- ∞;+ ∞);

8.выпукла вверх;

9.дифференцируема.



$y = \log_a x$ при $0 < a < 1$;

1.D(f) = (0;+);

2.не является ни четной, ни нечетной;

3.убывает на (0; +);

4.не ограничена сверху, не ограничена снизу;

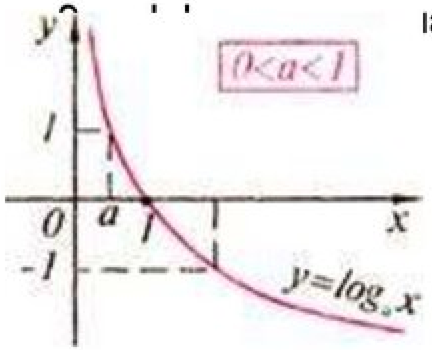
5.нет ни наибольшего, ни наименьшего значений;

6.непрерывна;

7.E(f) = (-;+);

8.выпукла вниз;

9. ...а.



Решение логарифмических уравнений

Логарифмическими называются уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма (в основании логарифма)

Методы решения:

1. По определению логарифма
2. Метод потенцирования

1. По определению логарифма

Решение простейшего логарифмического уравнения

$$\log_a f(x) = b, \text{ где } a > 0, a \neq 1$$

основано на применении определения логарифма и решении равносильного уравнения

$$f(x) = a^b$$

Методы решения логарифмических уравнений

2. Потенцированием

Под потенцированием понимается переход от равенства, содержащего логарифмы, к равенству, не содержащему их:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad \text{где} \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\Downarrow$$

$$f(x) = g(x),$$

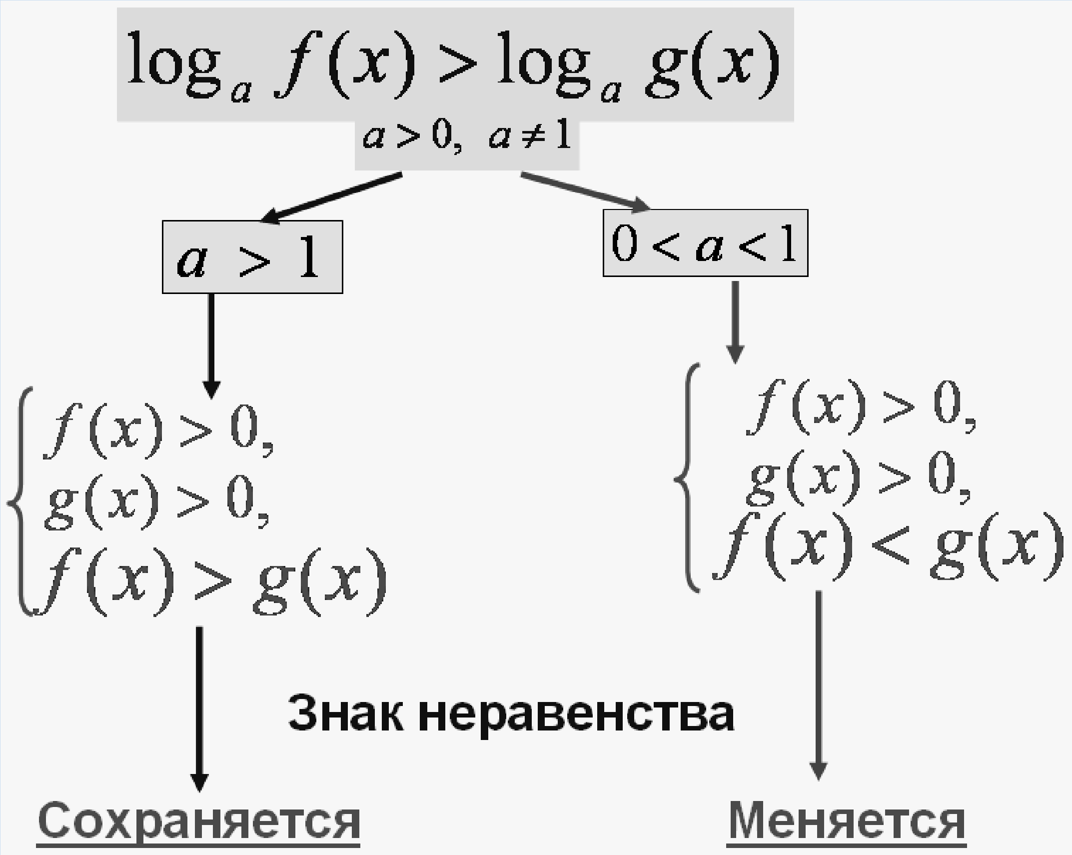
$$f(x) > 0 \;\; и \;\; g(x) > 0$$

Решив полученное равенство, следует сделать проверку корней, т.к.применение формул потенцирования расширяет область определения уравнения

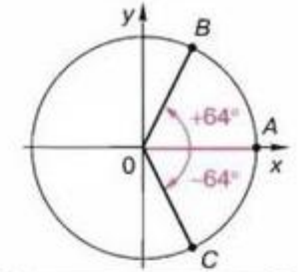
Решение логарифмических неравенств

Для решения логарифмических неравенств необходимо выполнить следующие шаги:

1. Привести логарифмы слева и справа к одинаковому основанию.
2. Вычеркнуть логарифмы.
3. Сохранить знак неравенства, если основание больше единицы.
4. Изменить знак неравенства на противоположный, если основание меньше 1.
5. Внимательно следить за областью допустимых значений (ОДЗ).



Радианное измерение углов. Синус, косинус, тангенс, котангенс угла



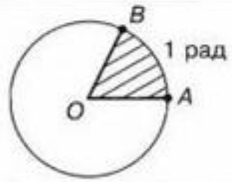
Радиус *OA* называется начальным радиусом.

Если повернуть начальный радиус около точки 0 по часовой стрелке, то угол поворота считается отрицательным.

Если повернуть начальный радиус около точки 0 против часовой стрелки, то угол поворота считается положительным.

Углы и дуги могут измеряться в градусах и радианах.

Угол в 1° — это угол, который опишет начальный радиус, совершив $\frac{1}{360}$ часть полного оборота вокруг своей начальной точки против часовой стрелки; $\frac{1}{60}$ часть градуса — минута; $\frac{1}{60}$ часть минуты — секунда.



Угол в 1 радиан есть центральный угол *BOA*, опирающийся на дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности:

$(OA = \smile AB)$.

Радианная мера любого угла *AOB* есть отношение длины дуги *AB*, описанной произвольным радиусом из центра *O* и заключенной между сторонами угла, к радиусу *OA* этой дуги.

Перевод из градусной меры в радианную:

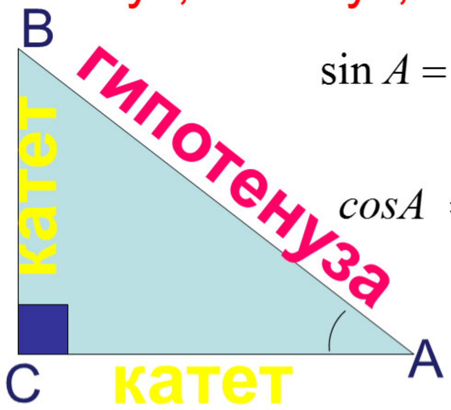
$$n^\circ = \frac{\pi \cdot n^\circ}{180^\circ}\ рад.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\ рад.$$

Перевод из радианной меры в градусную:

$$n \cdot \pi_{\ рад} = n \cdot 180^\circ$$

Синус, косинус,тангенс и котангенс угла.



$$\sin A = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{BC}{AB}$$

$$cosA = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{гипотенуза}} = \frac{AC}{AB}$$

$$tgA = \frac{\text{противолежащий катет}}{\text{прилежащий катет}} = \frac{BC}{AC}$$

$$ctgA = \frac{\text{прилежащий катет}}{\text{противолежащий катет}} = \frac{AC}{BC}$$

Формулы приведения

Функции	Углы								
	$-\alpha$	$90° - \alpha$	$90° + \alpha$	$180° - \alpha$	$180° + \alpha$	$270° - \alpha$	$270° + \alpha$	$360°k - \alpha$	$360°k + \alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\sin\alpha$
cos	$+\cos\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$+\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$
ctg	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$	$+\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$+\mathrm{ctg}\,\alpha$

Основные тригонометрические тождества, решение задач.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \qquad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

Обратные тригонометрические функции

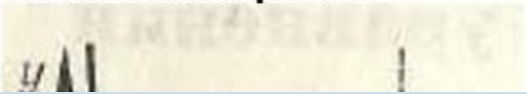
<u>Определение.</u> Арксинусом числа $a \in [-1;1]$ **называется такое число** $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, **синус которого равен** a

<u>Определение.</u> Арккосинусом числа $a \in [-1;1]$ **называется такое число** $\alpha \in [0;\pi]$, **косинус которого равен** a.

<u>Определение</u>. Арктангенсом числа а называется такое число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен а.

Обозначение: Арккотангенс **а** обозначается **<u>arcctg a.</u>**

- Арккотангенсом числа **а** называется такое число из интервала (0;**π**),котангенс которого равен **а**.



Решение уравнений: $\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$

Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, n € Z,

$\cos x = a$, $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, n € Z,

$\operatorname{tg} x = a$, $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, n € Z,

$\operatorname{ctg} x = a$, $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, n € Z,

Множества чисел. Комплексные числа, заданные в алгебраической форме

1. **Множество НАТУРАЛЬНЫХ чисел N, N={1, 2, 3, 4, 5, …}**
2. **Множество ЦЕЛЫХ чисел Z, Z={…, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …}**
3. **Множество РАЦИОНАЛЬНЫХ чисел Q, Q={x | x=p/q, где $p\in Z$, $q\in N$}**
4. **Множество ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ чисел I - ,бесконечные непериодические дроби, ($\sqrt{2}=1{,}414213...$, π=3,141592…, e=2,718281, …)**
5. **Множество ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ чисел R получено объединением РАЦИОНАЛЬНЫХ и ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ чисел.**
6. **Множество КОМПЛЕКСНЫХ чисел C, содержащих в себе мнимую единицу i, которая является квадратным корнем из –1. Построены для извлечения корня из отрицательных чисел.**

- $z = a + bi$

i – мнимая единица

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

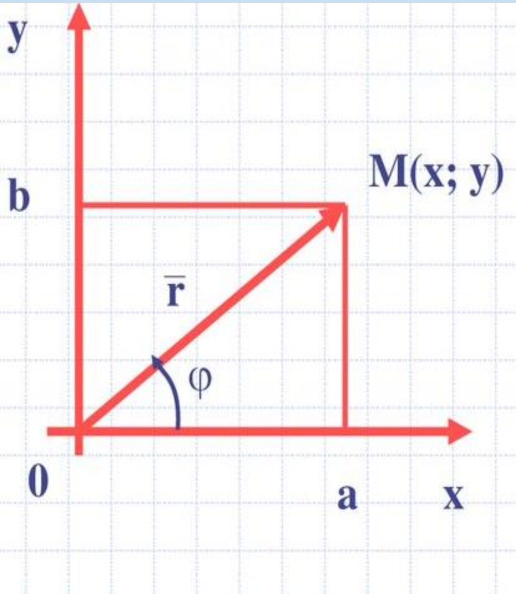
z – комплексное число

a + bi – алгебраическая форма комплексного числа

a – действительная часть числа z

b – мнимая часть числа z

Комплексные числа в геометрической форме. Арифметические действия над комплексными числами.



Комплексные числа на плоскости изображаются в прямоугольной декартовой системе координат либо точкой М(а; в), либо радиус – вектором этой точки

$\bar{\mathbf{r}} = \overline{\mathbf{OM}} = (а; в)$.

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Приращение функции. Понятие о производной.

Приращение функции и аргумента

$\Delta x = x - x_o$ – приращение аргумента

$$\left.\begin{aligned} \Delta f(x) &= f(x) - f(x_o) \\ \Delta f(x) &= f(x_o + \Delta x) - f(x_o) \end{aligned}\right\} \text{– приращение функции}$$

Производной функции $y = f(x)$, заданной на некотором интервале $(a; b)$, в некоторой точке x этого интервала называют **предел** отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Нахождение производной называют **дифференцированием**

Производные суммы, разности, произведения, частного. Производная сложной функции.

1. $(C)' = 0.$
2. $(kx + b)' = k.$
3. $(x^r)' = rx^{r-1}.$
4. $(e^x)' = e^x.$
5. $(a^x)' = a^x \ln a.$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$
8. $(\sin x)' = \cos x.$
9. $(\cos x)' = -\sin x.$

Производная произведения $(fg)' = f'g + fg'$

Производная суммы $(f + g)' = f' + g'$

Производная частного $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Сложная функция $f\left(g(x)\right)' = f'^{((x))} \times g'(x)$

Уравнение касательной

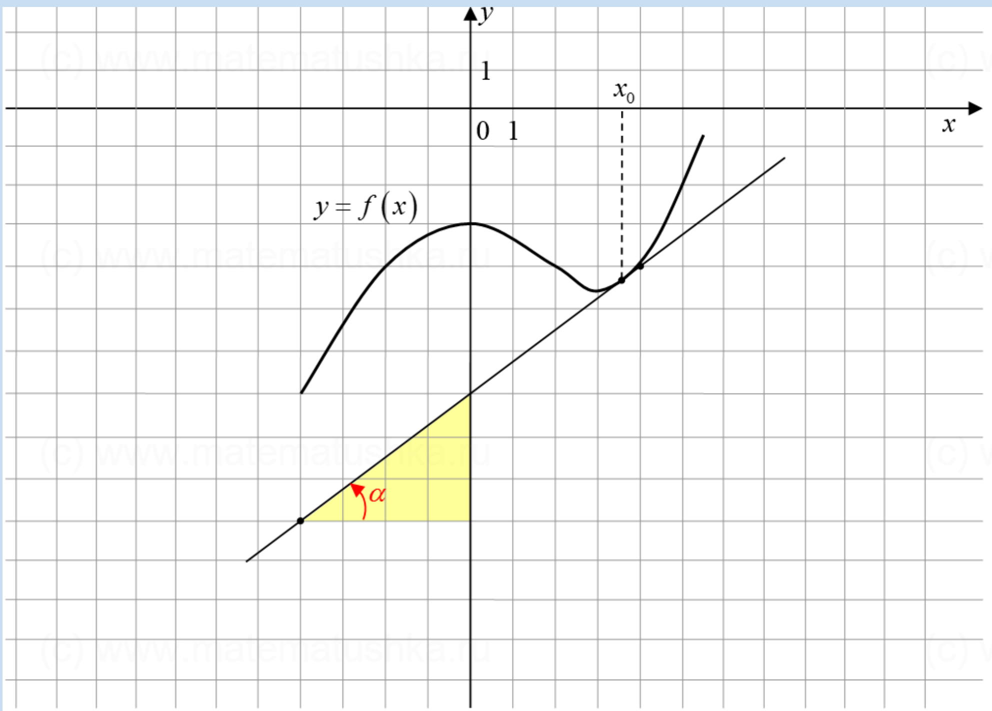
Задача. Написать уравнение касательной

Дано: $y = f(x), x_0$

Алгоритм составления уравнения касательной:

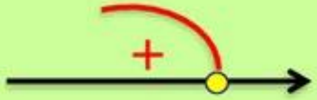
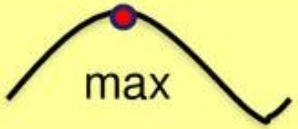
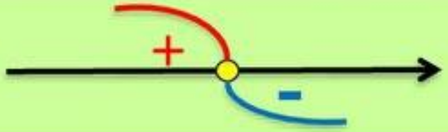
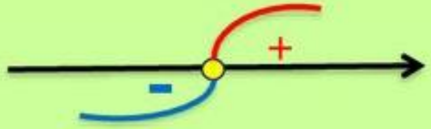
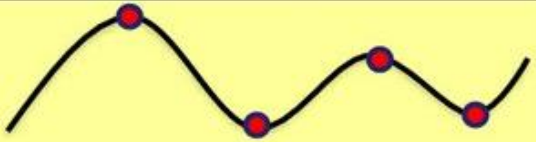
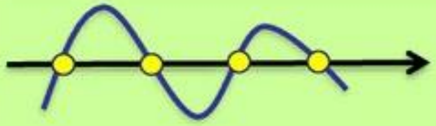
1. Вычислить $f(x_0)$
2. Найти $f'(x)$
3. Вычислить $f'(x_0)$
4. Составить уравнение касательной:

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$



Касательная к графику функции $y = f(x)$ – это прямая линия $y = kx + b$, угловой коэффициент которой равен значению производной в точке касания.

Применение производной к исследованию функции

Ситуация	Функция f(x)	Производная f´(x)
Возрастание функции		> 0 
Убывание функции		< 0 
Максимум функции		
Минимум функции		
Экстремумы функции		$= 0$ 
Касательная параллельна прямой y = a		$= 0$ 

Максимум и минимум функции, четность и нечетность функции

Функция y = f(x) называют *четной*, если:

1)*Область определения* ее *симметрична* относительно начала координат;

2)Для любого x из D(y) выполняется равенство *f(-x) = f(x)*.

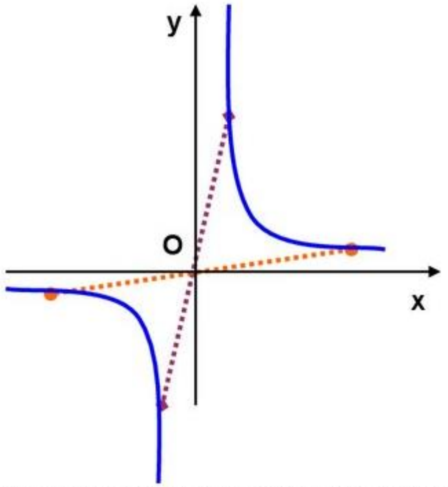


График симметричен относительно начала координат.

Функция y = f(x) называют *нечетной*, если:

1)*Область определения* ее *симметрична* относительно оси ОУ;

2)Для любого x из D(y) выполняется равенство *f(-x) = - f(x)*.

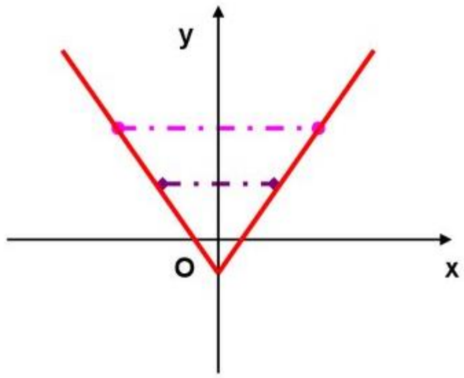


График симметричен относительно оси ОУ.

Признаки максимума и минимума функции:

- Если при переходе через стационарную точку x0 производная $f'(x)$ данной функции меняет знак с « – » на « + », то функция в этой точке x_0 имеет минимум.
- Если при переходе через стационарную точку x_0 производная $f'(x)$ данной функции меняет знак с « + » на « – », то функция в этой точке x_0 имеет максимум.

Первообразная и ее свойства. Таблица первообразных

Функция называется **первообразной** для функции , если выполняется равенство

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, c = const$$

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, a \neq 0$$

Функция	Множество всех первообразных
a	$ax+c,\ c\in\Re$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c,\ n\neq-1,\ c\in\Re$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+c$, *при* $x>0;\ c\in\Re$ $\ln(-x)+c$, *при* $x<0;\ c\in\Re$
$\sqrt{x}$	$\frac{2x\sqrt{x}}{3}+c,\ c\in\Re$
$\sin x$	$-\cos x+c,\ c\in\Re$
$\cos x$	$\sin x+c,\ c\in\Re$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg}x+c,\ c\in\Re$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\mathrm{ctg}x+c,\ c\in\Re$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+c,\ c\in\Re$
e^x	$e^x+c,\ c\in\Re$

Понятие функции. Основные свойства функции. Алгоритм исследования

Функция – зависимость одной переменной от другой, причем для любых значений x соответствует единственное значение функции y.

График функции – множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты соответствующим значениям функции.

Свойства функции

Область определения D(x)	Все значения которые принимает независимая переменная – аргумент х
Область значения E(y)	Все допустимые значения которые принимает зависимая переменная функция у
Промежутки возрастания и убывания	f(x) – возрастает, если наибольшему значению аргумента х соответствует наибольшее значение функции f(x) f(x) – убывает, если наибольшему значению аргумента х соответствует наименьшее значение функции f(x)
Промежутки знакопостоянства	Все значения аргумента х при которых функция принимает положительные значения y>0 или отрицательные значения y<0
Нули функции	Значения аргумента х, при котором значение функции равно нулю (y = 0).
Четность и нечетность функции	f(x)–четная, если f(-x)=f(x), график четной фун.симметричен оси ОУ f(x) – нечетная, если f(-x) = - f(x), график нечетной функции симметричен начала координат
Ограниченность	Функция y = f(x) ограниченна снизу на множестве Х, если все значения функции на множестве Х больше некоторого числа. Функция y = f(x) ограниченна сверху на множестве Х, если все значения функции на множестве Х меньше некоторого числа.

Схема исследования функции

1. Найти область определения функции;
2. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность;
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат;
4. Исследовать функцию на монотонность, то есть найти промежутки возрастания и убывания функции;
5. Найти точки экстремума и экстремальные значения функции;
6. Построить график функции.

Линейные функции. График линейной функции

Линейная функция и ее график

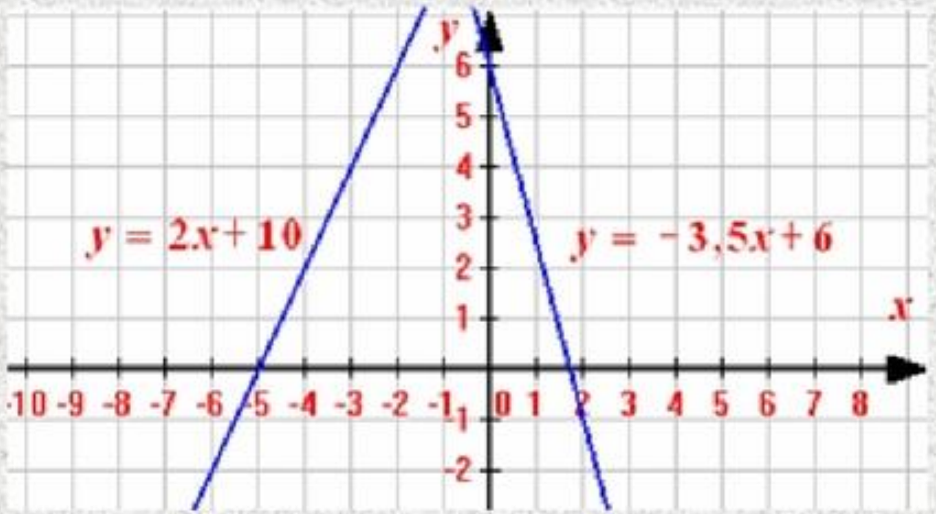
Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где x – независимая переменная, k и b – некоторые числа

Графиком линейной функции является *прямая.*

Область определения – R; Область значения – R

Если $k > 0$, то 1 и 3 четверть, функция возрастает

Если $k < 0$, то 2 и 4 четверть, функция убывает

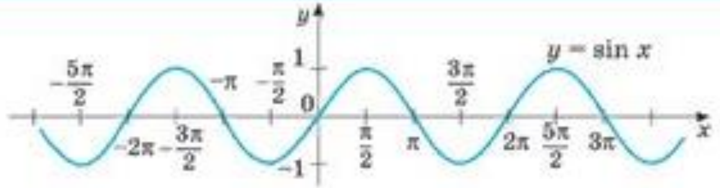
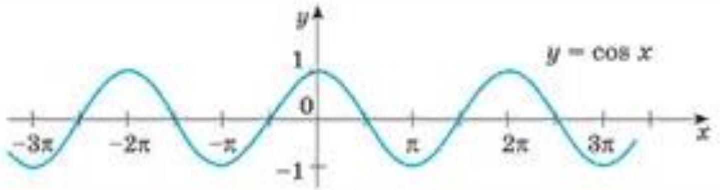
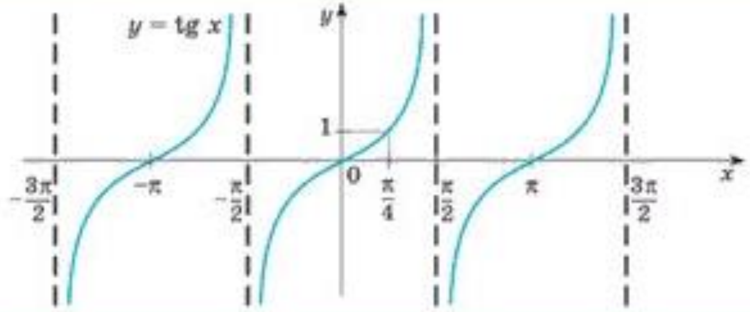
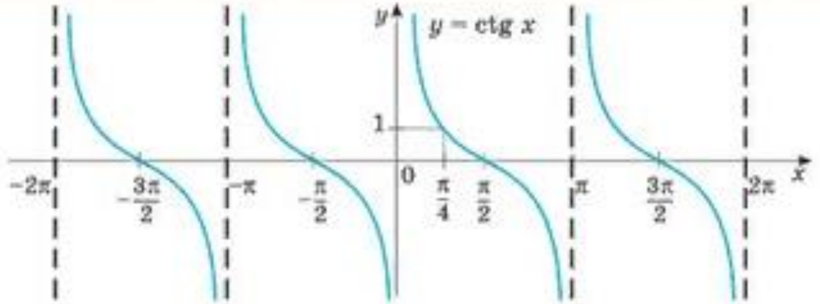


Для построения графика линейной функции достаточно найти координаты двух точек графика, отметить эти точки на координатной плоскости и провести через них прямую.

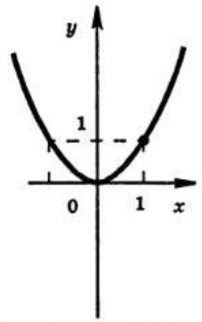
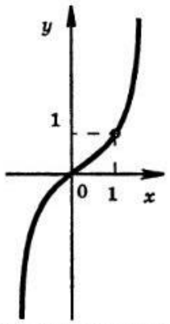
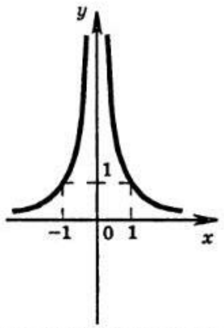
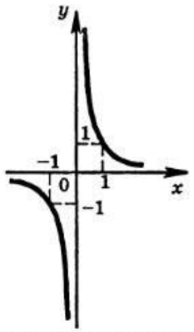
Квадратичная функция и ее график

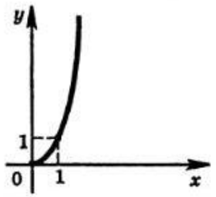
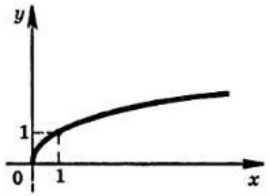
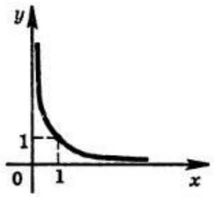
Квадратичная функция — это функция, которую можно записать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x — независимая переменная, a, b и c — это коэффициенты, задающие конкретный вид функции, причём $a \neq 0$. График квадратичной функции представляет собой параболу. Чтобы схематично представить график конкретной функции, нужно знать направление ветвей параболы и знак дискриминанта.

Тригонометрические функции, их свойства и графики

$y = \sin x$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$ $E(y) = [-1; 1]$ Период $T = 2\pi$. Нечетная функция.	
$y = \cos x$	$D(y) = (-\infty; +\infty)$ $E(y) = [-1; 1]$ Период $T = 2\pi$. Четная функция.	
$y = \mathrm{tg}\, x$	$D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ $E(y) = (-\infty; +\infty)$ Период $T = \pi$. Нечетная функция. Возрастает на всей области определения. Асимптоты $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$.	
$y = \mathrm{ctg}\, x$	$D(y) = (\pi k; 2\pi k)$ $E(y) = (-\infty; +\infty)$ Период $T = \pi$. Убывает на всей области определения. Асимптоты $x = \pi k$.	

Степенная функция, ее свойства и график

Степенная функция $y = x^n$		$y' = nx^{n-1}$	
$n = 0$; $y = 1$; $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E(y) = \{1\}$.			
$n > 0$, натуральное		**$n < 0$, целое**	
n — четное	*n — нечетное*	*n — четное*	*n — нечетное*
$D(y) = R$	$D(y) = R$	$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	
$E(y) = [0; +\infty)$	$E(y) = R$	$E(y) = (0; +\infty)$	$E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$
			
Четная функция	Нечетная функция	Четная функция	Нечетная функция

n — не целое число		
$n > 1$	$0 < n < 1$	$n < 0$
$D(y) = [0; +\infty) = E(y)$		$D(y) = (0; +\infty) = E(y)$
		

Решение линейных уравнений (алгоритм)

Линейное уравнение — это уравнение, записанное в виде: $ax + b = 0$, где a и b являются действительными числами.

Решение линейных уравнений

$$ax + b = 0; \quad ax = c;$$

Алгоритм решения линейного уравнения

1. СКОБКИ

Раскрыть скобки, упростить;

$3(x + 5) = x + 9$

$3x + 15 = x + 9$

2. ПЕРЕНОС, ЗНАКИ

Слагаемые, содержащие переменную, перенести в одну часть уравнения, а числа – в другую часть, при переносе менять знаки на противоположные;

$3x – x = 9 – 15$

Виды линейных уравнений:

$3x – 2 = 16$

$5x + x + 7 = 31$

$6x – 15 = x$

$6x + 9 = 8x – 5$

$3(x + 5) = x + 9$

$3x + 15 = x + 9$

$3x – x = 9 – 15$

$2x = –6$

$x = –6 : 2$

$x = –3$

3. ПОДОБНЫЕ

Привести подобные слагаемые в левой и правой частях уравнения, упростить;

$2x = –6$

4. КОРЕНЬ

Разделить число в правой части уравнения на коэффициент при переменной.

$x = –6 : 2$

$x = –3$

Уравнение –
равенство, содержащее переменную.

Решить уравнение –
найти все его корни или указать, что корней нет.

Корень уравнения –
значение переменной, которая при подстановке в исходное уравнение обращает его в верное равенство.

Решение квадратных уравнений (алгоритм)

Решение полного квадратного уравнения.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\boxed{D = b^2 - 4ac}$$

дискриминант квадратного уравнения

$D < 0$ **- корней нет**

$D = 0$ **- один корень** $x = -\dfrac{b}{2a}$

$D > 0$ **- два корня** $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

Метод Крамера для решения систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 * b_2 - a_2 * b_1$$

$$\Delta 1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 * b_2 - c_2 * b_1$$

$$\Delta 2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 * c_2 - a_2 * c_1$$

$$x = \frac{\Delta 1}{\Delta}; y = \frac{\Delta 2}{\Delta}$$